Leçon 253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.

1. Principaux résultats sur les ensembles et fonctions convexes. —

On se place sur E un $\mathbb{R}$-ev normé.

1. *Ensembles convexes.* —

- Def d'une combinaison convexe. Def de $[x, y]$. Def d'un ensemble étoilé, d'un ensemble convexe.
- Def d'une enveloppe convexe : Plus petit convexe contenant A. C'est aussi l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A.
- L'enveloppe convexe d'un ensemble borné est bornée.
- L'enveloppe convexe d'un ensemble compact est compacte.
- L'enveloppe convexe d'un ouvert et ouverte.
- Contre-ex : L'enveloppe convexe du fermé $\{(0,0\} \cup \{(x, y)$ tq $x > 0, y > 0$ et $y \geq \frac{1}{x}\}$ est $\{(0,0\} \cup \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ qui n'est pas un fermé.
- Théorème de Carathéodory : En dimension n, l'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus n+1 points de A.
- Théorème de Gauss-Lucas : Pour P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, l'ensemble des zéros de P' est dans l'enveloppe convexe des zéros de P. (Lorsque P est dans $\mathbb{R}[X]$ et scindé, le théorème de Rolle nous donne ce résultat)

2. *Fonctions convexes, caractérisations.* —

- Def de convexité, stricte convexité, forte convexité, concavité.
- Ex : une norme sur E, $< Ax, x >$ sur R^n pour $A \in S_n^{++}$, exp sur $\mathbb{R}$.
- La somme de fonct convexes est convexe, la limite simple aussi. Si f est convexe, -f est concave.
- Le produit de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = x^2.x$ non-convexe).
- Si f est différentiable sur U, alors pour $x, y \in U$, $D(f)$ est croissante sur $[x, y]$. Dans le cas réel, f' est croissante sur I.
- Les fonct convexes ne sont pas toutes différentiables, ex $|x|$.
- Si f est D^2 en x, alors sa hessienne est positive. Ex : $< Ax, x >$, $f(x) = x^4$.
- $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$ est fortement convexe ssi A définie positive, et on connaît la constante de forte convexité. Donc $< Ax, x >$ est coercive.

2. Inégalités de convexité et applications. —

1. *Quelques inégalités classiques.* —

- Inégalité arithmético-géométrique (via exp et ln)
- Inégalité de Young : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec égalité ssi $a^p = b^q$. (le cas p=q=2 se démontre polynômialement. le cas général se démontre avec l'inégalité arithmético-géométrique)
- Inégalité de Jensen : Pour $g : [0,1] \to]a, b[$ continue et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ convexe, $f(\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(g(x))dx$.

2. *Inégalités dans les L^p.* —

- Inégalité de Hölder : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).
- Inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ Les L^p sont des evn et L^2 est préhilbertien.
- Inégalité de Young pour la convolution : $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$, où $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Donc L^1 muni de * est une $\mathbb{R}$-algèbre.
- Si $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$.
- Lemme de Fatou : $\liminf(\int f_n) \leq \int \liminf(f_n)$. Les L^p sont complets pour $\|.\|_p$.

3. *Inégalités en probabilités.* —

- Inégalité de Jensen version probas : Pour X v.a. réelle intégrable, $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
- Inégalité de Hoeffding. Applications. (cf : Ouvrard)
- **Dev** : Processus de Galton-Watson : Soient $X_{n,k}$ des v.a iid de loi discrète sur $\mathbb{N}$, intégrables. On définit la suite de v.a. (Z_n) par $Z_0 := 1$ et $Z_{n+1} := \sum_{k=1}^{Z_n} X_{n+1,k}$. Alors la probabilité d'extinction $a := P(\{existsn$ tq $Z_n = 0\})$ vaut 1 si $E[X_{0,0}] < 1$ ou si $P(X_{0,0} = 1) = 1$ et est dans $[0, 1[$ si $E[X_{0,0}] \geq 1$ et $P(X_{0,0} = 1) < 1$.
- Appli à Galton-Watson ?

3. Quelques applications de la convexité en analyse fonctionnelle et en optimisation. —

1. *Séparation et projection sur des convexes.* —

- Def séparation de convexes.
- Théorème de Hahn-Banach géométrique (en dim finie). Critère de densité d'un sous-ev.
- Sur un Hilbert muni de $\|.\|$ on a le théorème de projection sur un convexe fermé.
- $E = \overline{F} \oplus F^\perp$. Critère de densité d'un s-ev, application aux bases Hilbertiennes. (Ex : $L^2([0, 2\pi[)$ et les $e^{i.nt}$)
- Théorème de Stampacchia, de Lax-Milgram.

2. *Convexité et extrema, points fixes.* —

- Si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.
- **Dev** : Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert, C une partie non-bornée de H, et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f admet un minimum sur C, et ce minimum est atteint sur une sous-partie connexe par arcs.
- Méthode de Newton pour $f"(x) > 0$.
- Théorème de point fixe sur les convexes compacts : Soit K un convexe compact de E et f un endomorphisme tel que $f(K) \subset K$. Alors f a un point fixe dans K.

– Théorème du point fixe de Brouwer.

Références

Rombaldi : Fonctions convexes, régularité, Inégalités de Young, Jensen
Briane-Pagès : Inégalités de Hölder, Minkowski
Hiriart-Urruty : $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$, Gradient à pas conjugué
Rouvière : Méthode de Newton du cas convexe
Hirsch-Lacombe : Projection sur un convexe fermé dans un Hilbert
Ciarlet : Optimisation dans un Hilbert (Dev)
Ouvrard : Partie probas + Galton-Watson (Dev)
Brézis : Hahn-Banach géométrique, Stampacchia, Lax-Milgram

May 9, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*